

LIXANDRU RADU

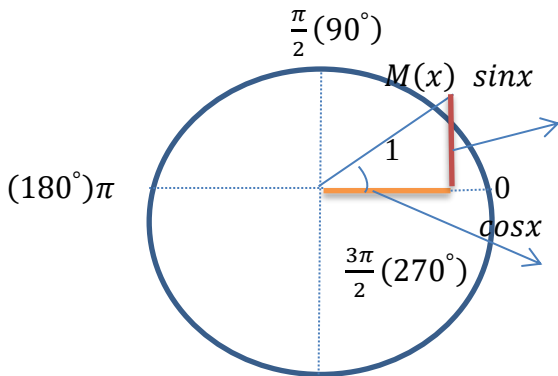
AUXILIAR CURRICULAR
de sprijin
CLASA a IX-a
ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

August 2023

FORMULA FUNDAMENTALĂ A TRIGONOMETRIEI

Funcțiile trigonometrice $\sin$ și $\cos$ au fost definite pe $\mathbf{R}$ folosind cercul trigonometric.

Astfel am constatat că $\sin x$ reprezintă **ordonata** punctului de pe cercul trigonometric corespunzător lui x , iar $\cos x$ reprezintă **abscisa** punctului de pe cerc corespunzător lui x , unde $x \in \mathbf{R}$.



În triunghiul dreptunghic format aplicăm teorema lui Pitagora și obținem

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1, (\forall) x \in \mathbf{R}} \quad \text{FORMULA FUNDAMENTALĂ A TRIGONOMETRIEI}$$

Observăm că formula realizează o legătură între valorile pentru $\sin$ și $\cos$ în același număr real x .

Exemple:

I) Verificați următoarele egalități:

1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

2) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

3) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

4) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1$

5) $\sin^2 180^\circ + \cos^2 180^\circ = 1$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Exercițiile 2),3),4) și 5) se vor rezolva ca **temă**.

II) Aflați numărul real $\sin x$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{3}{5}$. (se mai putea da $x \in (0^\circ, 90^\circ)$)

Rezolvare:

Formula fundamentală a trigonometriei ne spune că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin^2 x + \frac{9}{25} &= 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} \\ &= \frac{25 - 9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin x \\ &= \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\left. \sin x = \pm \frac{4}{5} \right\} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5} \text{ (am ales semnul } x \in (0^\circ, 90^\circ))$$

corespunzător cadranelui I dat de interval)

Exerciții propuse spre studiu individual:

I. Arătați că:

- 1) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$
- 2) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$
- 3) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1$
- 4) $\sin^2 180^\circ + \cos^2 180^\circ = 1$

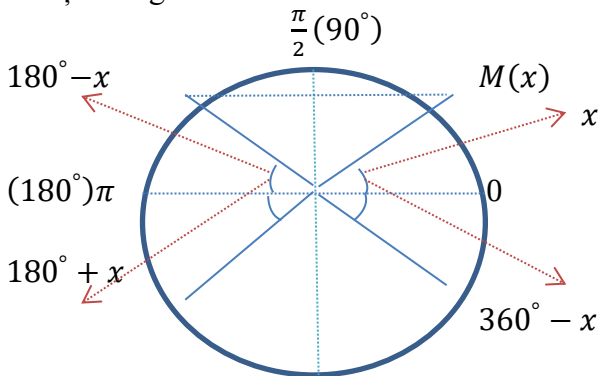
II. Calculați:

- 1) $(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \cdot (\sin^2 41^\circ + \cos^2 41^\circ) \cdot (\sin^2 42^\circ + \cos^2 42^\circ) =$
- 2) $(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) \cdot (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ)^2 \cdot \dots \cdot (\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ)^{90} =$
- 3) $(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + 2(\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + 3(\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + \dots + 25(\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) =$

III. Aflați numărul real $\cos x$ știind că $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$.

FORMULE DE REDUCERE LA PRIMUL CADRAN

Pentru început vom reaminti ceea ce am obținut până în prezent cu privire la funcțiile trigonometrice:



Așa cum am stabilit în orele anterioare pauzei forțate $\pi = 180^\circ$ este măsura în radiani a unui unghi. În general problemele noastre la trigonometrie vor fi formulate cu ajutorul unghiurilor exprimate în grade (hexagesimale).

Folosind definițiile funcțiilor trigonometrice $\sin$ și $\cos$ vom constata pe cercul trigonometric faptul că funcționează

anumite relații(formule) care vor face trecerea de la cadranul II ($180^\circ - x$), cadranul III ($180^\circ + x$) sau cadranul IV ($360^\circ - x$) la primul cadran.

Formulele de reducere la primul cadran:

Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ adică $x \in (0^\circ, 90^\circ)$

$\boxed{\sin(180^\circ - x) = \sin x}$ (sinusul unui unghi ascuțit este egal cu sinusul suplementului său)

$$\sin(180^\circ + x) = -\sin x$$

$$\sin(360^\circ - x) = -\sin x$$

Observăm faptul că formulele precedente urmează semnul funcției $\sin$ pe cercul trigonometric! ($\sin$ este pozitivă în cadranele I și II („deasupra”) și negativă în cadranele III și IV)

$\boxed{\cos(180^\circ - x) = -\cos x}$ (cosinusul unui unghi ascuțit este egal cu opusul cosinusului suplementului său)

$$\cos(180^\circ + x) = -\cos x$$

$$\cos(360^\circ - x) = \cos x$$

Observație

- 1) Pentru că problemele practice se vor referi în principal la unghiuri ascuțite

sau obtuze vom lucra multe aplicații la prima formula pentru fiecare dintre cele două funcții.

- 2) Cu ajutorul formulelor precedente vom obține rezultate asemănătoare și pentru funcțiile tg și ctg .

Exemple:

$$1) \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De observat că 120° este în intervalul $(90^\circ, 180^\circ)$ adică în cadranul II unde $\sin$ este pozitivă și rezultatul calculului nostru este și el pozitiv.

$$2) \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

De observat că 210° este în intervalul $(180^\circ, 270^\circ)$ adică în cadranul III unde $\sin$ este negativă și rezultatul calculului nostru este și el negativ.

$$3) \sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = \\ -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De observat că 315° este în intervalul $(270^\circ, 360^\circ)$ adică în cadranul IV unde $\sin$ este negativă și rezultatul calculului nostru este și el negativ.

Observație

În cazul primului exemplu am privit unghiul de 120° ca fiind scris $180^\circ - 60^\circ$ și prin urmare 60° reprezintă x din formulă.

Putem însă să privim în formulă pe x ca fiind chiar 120° ! Obținem astfel

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alte exemple:

$$1) \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = \\ -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De observat că 135° este în intervalul $(90^\circ, 180^\circ)$ adică în cadranul II unde $\cos$ este negativă și rezultatul calculului nostru este și el negativ.

$$2) \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

De observat că 240° este în intervalul $(180^\circ, 270^\circ)$ adică în cadranul III unde $\cos$ este negativă și rezultatul calculului nostru este și el negativ.

$$3) \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De observat că 330° este în intervalul $(270^\circ, 360^\circ)$ adică în cadranul IV unde $\cos$ este pozitivă și rezultatul calculului nostru este și el pozitiv.

Reținem!

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x \quad \text{sau} \quad \sin x = \sin(180^\circ - x)$$

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x \quad \text{sau} \quad \cos x = -\cos(180^\circ - x)$$

Și pentru că presimt că vă place mai exersăm!
Calculați:

$$1) \sin 100^\circ - \sin 80^\circ;$$

$$2) \cos 70^\circ + \cos 110^\circ;$$

$$3) \sin 10^\circ - \sin 170^\circ;$$

$$4) \cos 140^\circ + \cos 40^\circ;$$

Rezolvare:

$$1) \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\text{Deci } \sin 100^\circ - \sin 80^\circ = \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$$

$$2) \cos 110^\circ = -\cos(180^\circ - 110^\circ) = -\cos 70^\circ$$

$$\text{Deci } \cos 70^\circ + \cos 110^\circ = \cos 70^\circ + (-\cos 70^\circ) = 0$$

$$3) \sin 170^\circ = \sin(180^\circ - 170^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$\text{Deci } \sin 10^\circ - \sin 170^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$$

$$4) \cos 140^\circ = -\cos(180^\circ - 140^\circ) = -\cos 40^\circ$$

$$\text{Deci } \cos 140^\circ + \cos 40^\circ = -\cos 40^\circ + \cos 40^\circ = 0.$$

* Calculați $\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots \cos 180^\circ$

Remarcăm că avem câteva valori din acest șir de numere pe care le putem menționa:

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

Pentru celelalte valori facem legătura pentru unghiurile obtuze cu unghiurile din primul cadran (ascuțite).

$$\cos 179^\circ = -\cos(180^\circ - 179^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$\cos 178^\circ = -\cos(180^\circ - 178^\circ) = -\cos 2^\circ$$

$$\cos 177^\circ = -\cos(180^\circ - 177^\circ) = -\cos 3^\circ$$

....

$$\cos 91^\circ = -\cos(180^\circ - 91^\circ) = -\cos 89^\circ$$

Obținem astfel

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots \cos 180^\circ \\ = 1 + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots \\ + \cos 88^\circ + \cos 89^\circ + 0 \\ + (-\cos 89^\circ) + (-\cos 88^\circ) + \dots + \\ (-\cos 1^\circ) + (-1) = 0 \\ \text{(se reduc termenii doi câte doi).} \end{aligned}$$

Pentru fixarea acestor formule vă propun spre rezolvare următoarele exerciții:

Calculați:

1) $\sin 11^\circ - \sin 169^\circ$;

2) $\cos 20^\circ + \cos 160^\circ$;

3) $\sin 111^\circ - \sin 69^\circ$;

4) $\cos 14^\circ + \cos 166^\circ$;

5) $(\sin 30^\circ - \sin 150^\circ)(\cos 45^\circ + \cos 135^\circ)$

6) $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$;

7) $\sin^2 10^\circ + \cos^2 170^\circ$

Aplicații ale trigonometriei în geometrie

Arii

În clasa a VII-a ați studiat primele elemente de trigonometrie și ați constatat cât de multe aplicații are acesta. Printre ele se regăsește și **aria unui triunghi**.

Astfel, ați obținut formula $A_\Delta = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\widehat{l_1, l_2})}{2}$, unde l_1, l_2 sunt lungimile a două

laturi din triunghi și $(\widehat{l_1, l_2})$ este unghiul format de acestea.

Exemple:

- 1) În ΔABC se cunosc $AB = 4, BC = 6$,
 $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$. Determinați $A_{\Delta ABC}$.

Rezolvare:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC})}{2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

- 2) În ΔABC se cunosc $AB = 10, AC = 8$,
 $m(\widehat{BAC}) = 150^\circ$. Determinați $A_{\Delta ABC}$.

Rezolvare:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2} = \frac{10 \cdot 8 \cdot \sin 150^\circ}{2} = 5 \cdot 8 \cdot$$

$\frac{1}{2} = 20$, unde $\sin 150^\circ$ se calculează astfel:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Pentru a fixa modul de calcul al ariei unui triunghi vă propun următoarele exerciții:

- 1) În ΔABC se cunosc $AB = 6, BC = 10$,
 $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$. Determinați $A_{\Delta ABC}$.

- 2) În ΔABC se cunosc $AC = 12, BC = 8$,
 $m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$. Determinați $A_{\Delta ABC}$.
- 3) În ΔMNP se cunosc $MN = 14, NP = 16$, $m(\widehat{MNP}) = 60^\circ$. Determinați $A_{\Delta MNP}$.

EVALUARE - FUNCȚIA DE GRADUL I,
FUNCȚII TRIGONOMETRICE

- I) Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 10$, $g: [-2; 5] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 5 - 3x$.
- a) Calculați $f(-3) \cdot f(5)$.
- b) Arătați că $f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{4}{3}\right)$ este număr natural.
- c) Demonstrați că $f(-\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{3})$ este număr întreg.
- d) Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .

- e) Stabiliți semnul funcției f .
- f) Demonstrați că $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ este număr întreg pentru orice numere întregi a, b .
- g) Aflați punctul de pe graficul funcției f cu ordonata egală cu triplul abscisei.
- h) Determinați $m \in \mathbf{R}$ pentru care $A(3 - 2m; 8)$ aparține graficului funcției f .
- i) Stabiliți coordonatele punctului de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g .
- j) Aflați mulțimea valorilor funcției g .

II) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația $(2x - 10)(6 - 3x) \leq 0$.

III) a) Arătați că $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 1$.

b) Pentru x unghi ascuțit și $\cos x = \frac{3}{5}$ calculați $\sin x$.

c) Calculați $\sin 135^\circ$.

d) Determinați $\cos 120^\circ$.

e) În triunghiul dreptunghic ABC , cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, se cunosc $AB = 6, BC = 10$. Calculați

$\sin(\hat{B})$ și aria triunghiului.

f) Calculați $\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.