

LIXANDRU RADU

AUXILIAR CURRICULAR
de sprijin
CLASA a IX-a
FUNCTIA DE GRADUL II

August 2023

Graficul funcției de gradul al doilea

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

Așa cum am povestit la ultima întâlnire avută înainte de intrarea în această pauză forțată am constatat că funcțiile de gradul al doilea admit un punct de minim sau de maxim.

Acesta este $x = -\frac{b}{2a}$ și valoarea minimă sau maximă a funcției este $y = -\frac{\Delta}{4a}$. Aceste valori reprezintă coordonatele unui punct important numit **vârful parabolei** asociate graficului funcției de gradul al doilea.

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ va fi astfel primul punct pe care îl vom determina în vederea trasării graficului funcției de gradul al doilea.

Următoarele puncte utile în trasarea funcției de gradul al doilea sunt cele de intersecție cu axele de coordonate:

$G_f \cap Ox = \{(x, 0) | x \in \mathbf{R}, f(x) = 0\}$. Această mulțime poate conține două puncte, un punct sau chiar niciun punct. Reamintesc faptul că

rezolvând ecuația $f(x) = 0$ aflăm și rădăcinile funcției.

$G_f \cap Oy = \{(0, y) | y = f(0) \in \mathbf{R}\}$. Această mulțime va conține un singur punct.

Pentru trasarea graficului vom mai alege cel puțin încă două valori ale lui x de o parte și de alta a numărului $x_V = -\frac{b}{2a}$, simetric față de acesta, în care calculăm valorile funcției.

Exemple:

$$1) f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Coeficienții funcției sunt $a = 1$, $b = -4$,
 $c = 3$

Cum $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ admite punct de minim

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este vârful parabolei

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

$$V\left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, -\frac{4}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow V(2, -1)$$

$$G_f \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3; x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$G_f \cap Ox = \{A(3,0); B(1,0)\}$$

$$G_f \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 3 \Rightarrow$$

$$G_f \cap Oy = \{C(0,3)\}$$

Deoarece $x_v = 2$ vom mai alege două valori pentru x simetrice față de 2 (de exemplu 0 și 4)

$$f(0) = 3 \text{ (deja calculat)} \Rightarrow C(0,3)$$

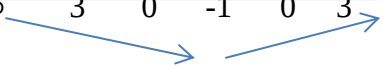
$$f(4) = 3 \Rightarrow D(4,3)$$

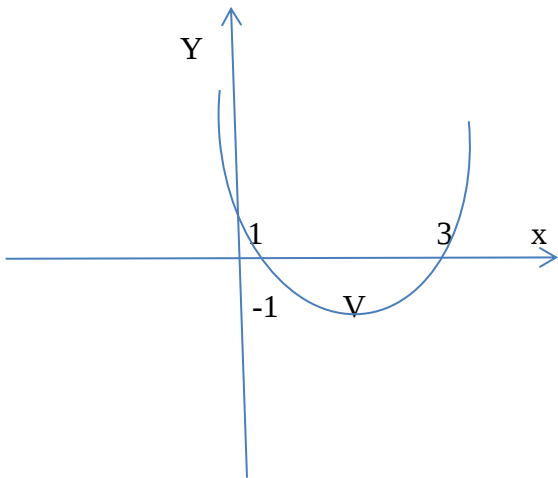
Concluzionând, punctele ce ne vor ajuta să reprezentăm grafic funcția sunt:

$$V(2, -1), A(3,0), B(1,0), C(0,3), D(4,3)$$

Acestea pot fi reprezentate și într-un tabel de valori

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	∞
$f(x)$	∞	3	0	-1	0	3	∞





$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Coeficienții funcției sunt $a = -1$, $b = 6$, $c = -5$

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este vârful parabolei

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$$

$$V\left(-\frac{6}{2 \cdot (-1)}, -\frac{16}{4 \cdot (-1)}\right) \Rightarrow V(3, 4)$$

$$G_f \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-6+4}{-2} = 1; x_2 = \frac{-6-4}{-2} = 5 \Rightarrow G_f \cap Ox = \{A(1,0); B(5,0)\}$$

$$G_f \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -5 \Rightarrow G_f \cap Oy = \{C(0, -5)\}$$

Deoarece $x_V = 3$ vom mai alege două valori pentru x simetrice față de 3 (de exemplu 2 și 4)

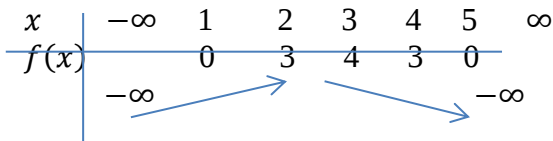
$$f(2) = 3 \Rightarrow D(2,3)$$

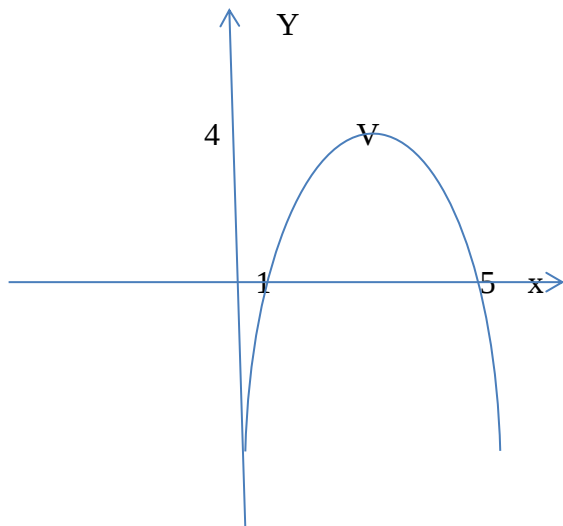
$$f(4) = 3 \Rightarrow E(4,3)$$

Concluzionând, punctele ce ne vor ajuta să reprezentăm grafic funcția sunt:

$$V(3,4),$$

$$A(1,0), B(5,0), C(0, -5), D(2,3), E(4,3)$$





În ambele exemple prezentate se constată anumite proprietăți ale funcțiilor de gradul al doilea cum ar fi:

- Dreapta de ecuație $x = x_V = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie a graficului funcției (simetricul oricărui punct de pe graficul funcției față de această dreaptă se află tot pe grafic)

- Mulțimea de valori a funcției este
 $Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ pentru $a > 0$ și
 $Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ pentru $a < 0$
- Numărul de puncte de intersecție a graficului funcției cu axa Ox depinde de numărul de rădăcini ale funcției. În cazul în care graficul funcției intersectează axa Ox într-un singur punct spunem că parabola este tangentă la axa Ox , aceasta întâmplându-se pentru $\Delta = 0$.

După redactarea pe caietele personale a reprezentărilor grafice precedente vă propun pentru fixarea cunoștințelor următoarele exerciții:

- 1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 6x + 5$.
 Reprezentați graficul funcției f .
- 2) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
 Reprezentați graficul funcției f .

- 3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4$.
Reprezentați graficul funcției f .

Funcția de gradul al doilea – aplicații

- 1) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- a) Calculați $f(1) + f(-1)$.
 - b) Aflați care dintre punctele $A(2, -1), B(-1, 1), C(3, -6)$ aparține graficului funcției f .
 - c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției cu axa Oy.
 - d) Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției cu axa Ox.
 - e) Aflați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(m; 3)$ aparține graficului funcției f .

- f) Să se calculeze coordonatele vârfului parabolei asociate graficului funcției f .
 - g) Calculați valoarea minimă a funcției f .
- 2) Fie $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5, g(x) = 3x - 3$
- a) Calculați $f(-2) + f(2)$.
 - b) Determinați $m \in \mathbf{R}$ pentru care $P(m + 1; -5)$ aparține graficului funcției f .
 - c) Aflați rădăcinile x_1 și x_2 ale funcției f .
 - d) Determinați valoarea maximă a funcției f .
 - e) Să se afle coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g .
 - f) Calculați $[f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)] \cdot g(1)$.

3) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + ax + b, a, b \in \mathbf{R}$. Aflați numerele a, b pentru care punctele $A(2; 3), B(-1; 0)$ aparțin graficului funcției f .

4) Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4$.

Demonstrați că:

a) $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) \in \mathbf{Z}$

b) $f(1 + \sqrt{2})f(1 - \sqrt{2}) \in \mathbf{Z}$