

LIXANDRU RADU

AUXILIAR CURRICULAR
de sprijin
CLASA a X-a
RECAPITULARE FINALĂ

August 2023

Ecuatii în $\mathbf{R}$

1) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile iraționale:

a) $\sqrt{2x+6} = 4$;

b) $\sqrt{x+2} = x-4$;

c) $\sqrt{6-x} = x$;

d) $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x^2-9} = 0$

e) $\sqrt[3]{3x-1} = 2$;

f) $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2} = x$

2) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile exponențiale:

a) $3^{2x+4} = 9$;

b) $2^{2x+4} = 2^{x^2+5}$;

c) $2^x + 2^{x+3} = 36$;

d) $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 21$

e) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;

f) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

3) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile logaritmice:

a) $\log_2(x+5) = 3$;

b) $\log_3(2x+5) = \log_3(4x-5)$;

c) $\log_5(3x+7) + \log_5(x-1) = 3$

d) $\log_4(x^2 + 4x - 5) - \log_4(x + 1) = 1$

4) Aflați $x \in \mathbf{R}$ din ecuațiile:

a) $(3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 2 ;$

b) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

Matematici financiare. Probabilități

1. Prețul unui produs este de 6000 lei. Aflați prețul produsului după o scumpire cu 20%.
2. În luna ianuarie prețul unei anvelope era de 350 lei. Un șofer cumpără această anvelopă în luna martie cu o reducere de 30%. Care este prețul anvelopei în luna martie? Dacă șoferul are 1000 de lei își poate înlocui în luna martie toate cele patru anvelope ale autoturismului său?

3. Gigel dorește să înlocuiască o componentă a calculatorului său și găsește o ofertă avantajoasă. După două zile Gigel se hotărăște să facă achiziția dar constată că prețul a crescut cu 30% ajungând la 585 lei. Care a fost prețul inițial al componentei calculatorului?
4. După o reducere cu 40% a prețului o jachetă costă 510 lei. Care era prețul jachetei înainte de reducere?
5. Cheltuielile unei firme cu publicitatea sunt de 10000 lei ceea ce reprezintă 20% din profitul anual al firmei. Care este profitul anual al firmei?
6. Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ acesta să fie multiplu de 10.
7. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A =$

- $\{0,2,4, \dots, 100\}$ acesta să fie pătrat perfect.
8. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}\}$ acesta să fie număr rațional?
 9. Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{1,2,3, \dots, 50\}$ acesta să fie divizor al lui 50.
 10. Calculați probabilitatea ca alegând un număr n din mulțimea $\{1,2,3, \dots, 50\}$ acesta să verifice egalitatea $n^2 - 5n + 4 = 0$.

METODE DE NUMĂRARE

Aplicații rezolvate

1. Simplificați următoarele fracții:

a)
$$\frac{7!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

Observăm că am scris $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ pregătind simplificarea prin $4!$

$$b) \frac{8!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$c) \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(n+1)!} = (n+2) \cdot (n+3) = n^2 + 3n + 2n + 6 = \\ = n^2 + 5n + 6$$

2. Rezolvați următoarele ecuații pentru $n \in \mathbb{N}$:

$$a) \frac{(n+4)!}{(n+2)!} = 20$$

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+2)! \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{(n+2)!} = 20 \Rightarrow \\ (n+3) \cdot (n+4) = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n + 3n + 12 = 20 \Rightarrow n^2 + 7n + 12 - 20 = 0 \Rightarrow n^2 + 7n - 8 = 0$$

$$a = 1, b = 7, c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{-7+\sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-7+9}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$n_2 = \frac{-7-\sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-7-9}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \notin N$$

Deci $n = 1$

$$\text{b) } \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12$$

Atenție! Dacă la exercițiul precedent pentru $n \in N$ aveam și $n + 4, n + 2 \in N$, de această dată vom avea de impus mici condiții pentru ca factorialele din enunț să aibă sens: $n - 1 \geq 0$ și $n - 3 \geq 0$.

Rezolvând inecuațiile obținem: $n \geq 1$ și $n \geq 3$. Dacă n îndeplinește a doua condiție atunci o va îndeplini și pe prima.

Deci $n \in N$ și $n \geq 3$.

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12 \Rightarrow \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)}{(n-3)!} = 12 \Rightarrow$$

$$(n-2)(n-1) = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 2n + 2 = 12 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 - 12 = 0 \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$a = 1, b = -3, c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in N \text{ și } n_1 \geq 3$$

$$n_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \notin N$$

Deci $n = 5$

Aplicații propuse

1. Simplificați următoarele fracții:

a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{9!}{7!}$; c) $\frac{100!}{98!}$

2. Rezolvați următoarele ecuații pentru $n \in N$:

a) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$; b) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 42$

Permutări. Aranjamente

Aplicații rezolvate

1. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ adică exact cât am numărat și mai devreme.

2. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

3. Câte numere cu patru cifre distincte putem forma folosind cifre din mulțimea $A = \{1,2,3,4\}$?

Cum numerele sunt mulțimi ordonate de cifre avem practic de aflat câte permutări are mulțimea A . Adică răspunsul la cerința exercițiului este $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Imaginați-vă că ar fi trebuit să scrieți toate aceste numere pentru a le număra! Cred că este mai util să folosim această formulă a permutărilor de n elemente!

4. $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ adică
exact câte aranjamente am scris în
exemplul precedent.

5. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 =$
 60

6. De exemplu dorim să aflăm câte
numere cu patru cifre distincte putem
forma folosind cifre din mulțimea $B =$
 $\{1,2,3,4,5\}$?

Cum numerele sunt mulțimi ordonate de cifre
și folosim doar patru cifre dintre cele cinci

date numărul solicitat este $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 120$ de numere.

Aplicații propuse:

1. Calculați:
a) P_4 ; b) P_6 ; c) A_4^3 ; d) A_6^2
2. Câte numere cu trei cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
3. Câte numere cu cinci cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

COMBINĂRI

Aplicații rezolvate:

1. $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$ adică exact câte submulțimi am găsit puțin mai sus.
2. $C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 1 \cdot 2} = 15$

3. Câte submulțimi cu 5 elemente are o mulțime cu 7 elemente?

$$\text{Răspuns: } C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 1 \cdot 2} = 21$$

4. Aflați numărul natural $n, n \geq 2$ care verifică relația $C_n^2 = 15$

$$C_n^2 = 15 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot (n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 15 \Rightarrow$$

$$(n-1) \cdot n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -30$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 11}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 11}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Cum $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ vom păstra ca soluție pe $n = 6$

Aplicații propuse:

1. Calculați:

$$\text{a) } C_4^2, C_5^4, C_6^5$$

- b) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$
2. Aflați numărul natural $n, n \geq 3$ care verifică relația $C_{n+1}^3 = 28$

Aplicații-metode de numărare

1. Calculați:
a) P_5 ; b) P_7 ; c) A_6^2 ; d) A_5^4 ; e) C_5^4 ;
f) C_7^2
2. Câte numere cu patru cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
3. Câte numere cu cinci cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
4. Câte numere cu patru cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{0,3,5,7,9\}$?
5. Câte numere cu cinci cifre distincte putem forma utilizând cifre din mulțimea $\{0,3,5,7,9\}$?

6. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $A_n^2 = 6$

b) $C_{n+2}^2 = 21$